

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系练习

一、一元二次方程的判别式

练习

1. 已知一元二次方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，它的根的情况是（ ）。
A. 两个不相等的实数根
B. 一个实数根
C. 无实根
D. 两个相等的实数根
2. 一元二次方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的根的情况是（ ）。
A. 有两个相等的实数根
B. 有两个不相等的实数根
C. 没有实数根
D. 无法确定
3. 下列所给方程中，没有实数根的是（ ）。
A. $x^2 + x = 0$ B. $5x^2 - 4x - 1 = 0$ C. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ D. $4x^2 - 5x + 2 = 0$

练习

4. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 _____。
5. 若关于 x 的方程 $(k-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是（ ）。
A. $k \geq 1$ B. $k > 1$ 且 $k \neq 2$ C. $k \leq 1$ D. $k \geq 1$ 且 $k \neq 2$
6. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是（ ）。
A. $k > \frac{1}{2}$ B. $k \geq \frac{1}{2}$ C. $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$ D. $k \geq \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$
7. 若关于 x 的一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 \neq x_2$ ，则 m 的取值范围是（ ）。
A. $m > -\frac{1}{4}$ B. $m < -\frac{1}{4}$ C. $m \geq -\frac{1}{4}$ D. $m \leq -\frac{1}{4}$
8. 若一元二次方程 $(k-1)x^2 - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{4} = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是（ ）。
A. $k \geq 1$ B. $k \leq 1$ C. $k > 1$ D. $k < 1$
9. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{m+3}x + m = 0$ 有两个实数根，则 m 的取值范围是（ ）。
A. $m \leq 1$ B. $m < 1$ C. $-3 \leq m \leq 1$ D. $-3 < m < 1$
10. 有两个一元二次方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$ ， $N: cx^2 + bx + a = 0$ ，其中 $ac \neq 0$ ， $a \neq c$ ，下列四个结论中正确的个数有（ ）。

- ①如果方程 M 有两个相等的实数根，那么方程 N 没有实数根
 ②如果方程 M 的两根符号相同，则方程 N 的两根符号也相同
 ③如果 5 是方程 M 的一个根，那么 5 也是方程 N 的一个根
 ④如果方程 M 和方程 N 有一个相同的根，那么这个根必是 $x = 1$

A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

练习

11. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.
12. 已知关于 x 的方程 $x^2 + ax + a - 2 = 0$.
- (1) 求证：不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根.
- (2) 若该方程的一个根为 1，求 a 的值及该方程的另一根.
13. 已知，关于 x 的方程 $x^2 + 2(2 - k)x + 3 - 6k = 0$.
- (1) 若 $x = 1$ 是方程的一个根，求 k 的值及方程的另一根.
- (2) 若 k 为任意实数，判断此时方程的根情况.
14. 已知关于 x 的方程 $m^2x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .
- (1) 求 m 的取值范围.
- (2) 是否存在实数 m ，使方程的两个实数根互为相反数？如果存在，求出 m 的值；如果不存在，说明理由.

练习

15. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长，且关于 x 的方程 $x^2 + 2(a - b)x - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$ 有两个相等的实数根，那么 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形.
16. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k + 1)x + k^2 + k = 0$.
- (1) 求证：方程有两个不相等的实数根.
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 的长是这个方程的两个实数根，第三边 BC 的长为 5. 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时，求 k 的值.

独步天下

17. 若关于 x 的一元二次方程 $2ax^2 - (a + 4)x + 2 = 0$ 有一个正整数解，则正整数 $a =$ _____.
18. 已知关于 x 的方程 $(a - 1)x^2 + 2x - a - 1 = 0$ 的根都是整数，那么符合条件的整数 a 有 () 个.
- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
19. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (2 + 2a)x + a + 2 = 0 (a \neq 0)$.
- (1) 求证：此方程总有两个不相等的实数根.

(2) 若此方程的两个根都为整数, 求整数 a 的值.

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 2 - m = 0 (m \neq 0)$.

(1) 证明: 不论 m 为何值时, 方程总有实数根.

(2) 当 m 为何整数时, 方程有两个不相等的非负整数根.

二、一元二次方程的根系关系

练习

21. 设方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2$ 的值为 ().

- A. 3 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. -2

22. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 - x_1x_2 =$ _____.

23. 设 x_1, x_2 是一元一次方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两个根, 且 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 =$ _____.

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + 3 = 0$ 有两个实数根 $x_1 = 1, x_2 = n$, 则代数式 $(m + n)^{2020}$ 的值为 ().

- A. 0 B. 1 C. 3^{2020} D. 7^{2020}

25. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且满足 $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, 则 k 的值为 ().

- A. -1 B. $\frac{3}{4}$ C. -1 或 $\frac{3}{4}$ D. 不存在

26. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两实数根之积为负, 则 m 的取值范围 _____.

练习

27. 已知方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 的一个根是 1, 则它的另一个根是 _____.

28. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + 12 = 0$ 的一根为 $x = -3$, 求 m 的值以及方程的另一根.

29. 一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根为 -1 和 3, 则 m 的值是 ().

- A. -3 B. 3 C. -2 D. 2

练习

30. 已知 α, β 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha$ 的值为 _____.

31. 若 a, b 是方程 $x^2 + 2x - 2006 = 0$ 的两根, 则 $a^2 + 3a + b =$ ().

- A. 2006 B. 2005 C. 2004 D. 2002

32.

设 a, b 是方程 $x^2 + 2016x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $(1 + 2018a + a^2)(1 + 2018b + b^2)$ 的值为 () .

A. 2017

B. 4

C. 2016

D. -4

33. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根, 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 则 $a =$ _____ .

34. 若 a, b 是一元二次方程 $x^2 - x - 2016 = 0$ 的两根, 则 $a^3 + 2017b - 2016 =$ _____ .

练习

35. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 7x + 4 = 0$ 的两根是 x_1, x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 () .

A. $-\frac{7}{4}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}$

D. $\frac{-7 - \sqrt{33}}{2}$

36. 若 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值为 () .

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7

37. 设关于 x 的方程 $2x^2 + kx + 2 = 0$ 的两根分别为 α, β , 且 $a^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, 则 k 等于 () .

A. 2

B. -4

C. 4

D. -2

38. 已知 a, b 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的两个根, 则代数式 $|a - b|$ 的值为 _____ .

39. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实数根 .

则 :

(1) $x_1^2 + x_2^2 =$ _____ .

(2) $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 =$ _____ .

(3) $x_1 - x_2 =$ _____ .

(4) $x_1^2 - x_2^2 =$ _____ .

(5) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) =$ _____ .

(6) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} =$ _____ .

(7) $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} =$ _____ .

(8) $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} =$ _____ .

(9) $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} =$ _____ .

40. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m - 3)x - m = 0$,

(1) 求证 : 方程有两个不相等的实数根 .

(2) 如果方程的两实根为 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$, 求 m 的值 .

41. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k - 1)x + k^2 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 求实数 k 的取值范围 .

(2) 若 $|x_1 + x_2| = x_1 \cdot x_2 - 1$, 求实数 k 的值 .

42.

若关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ，则 $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$ 的最小值为 _____ .

43. 已知 α ， β 是一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个根，则 $2\alpha^5 + 5\beta^3$ 的值为 _____ .

练习

44. 设实数 a ， b 满足 $3a^2 - 19a + 1 = 0$ 且 $3b^2 + 19b + 1 = 0$ ，求 $a + b$ 的值 .

45. 已知 a 、 b 满足 $a^2 - 2a - 5 = 0$ ， $b^2 - 2b - 5 = 0$ ，且 $a \neq b$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 3$ 的值是 () .

- A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

46. 若实数 a 、 b 满足 $a^2 + 3a = 2$ ， $b^2 + 3b = 2$ ，且 $a \neq b$ ，则 $(1 + a^2)(1 + b^2) =$ () .

- A. 18 B. 12 C. 9 D. 6

47. 如果实数 $a \neq b$ 满足 $(a + 1)^2 = 3 - 3(a + 1)$ ， $3(b + 1) = 3 - (b + 1)^2$ ，那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值为 _____ .

48. 若两个不等实数 m ， n 满足 $m^2 - 2m = a$ ， $n^2 - 2n = a$ ， $m^2 + n^2 = 5$ ，则 $m - n$ 的值为 _____ .

49. 已知 $a \neq b$ ，且 $a^2 - 13a + 1 = 0$ ， $b^2 - 13b + 1 = 0$ ，那么 $\frac{b}{1+b} + \frac{a^2+a}{a^2+2a+1} =$ _____ .

50. 若 $ab \neq 1$ ，且有 $3a^2 + 123456789a + 2 = 0$ ， $2b^2 + 123456789b + 3 = 0$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____ .

51. 若 $ab \neq 1$ ，且 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ ， $9b^2 + 2001b + 5 = 0$ ，则 $\frac{ab+a+1}{b} =$ _____ . (填小数形式)

52. 设 a 、 b 、 c 、 d 为互不相等的正实数，且 $(a^2 - c^2)(a^2 - d^2) = 1$ ， $(b^2 - c^2)(b^2 - d^2) = 1$ ，则 $a^2b^2 - c^2d^2 =$ () .

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 无法确定

独步天下

53. 已知 x 、 y 是正整数，并且 $xy + x + y = 23$ ， $x^2y + xy^2 = 120$ ，求 $x^2 + y^2$ 的值 .

54. 已知 x, y 都是实数， $x + y + xy = 4$ ， $xy^2 + yx^2 = 3$ ，求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 =$ _____ .